1.1

Uno sp. vett. sul campo $\mathbb{K}$ è un insieme X su cui sono def.:

- somma $x+y$ con proprietà (con $x, y, z \in X$)
  - commutativa: $x+y = y+x$
  - associativa: $x+(y+z) = (x+y)+z$
  - elemento neutro: $x+0 = x$
  - opposto: $x+(-x) = 0$

- prodotto $\lambda \cdot x$ con prop. (con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$)
  - distributiva: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ e $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
  - pseudo associativa: $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
  - elemento neutro: $1 \cdot x = x$

Uno sp. vett. normato è un insieme X sul campo $\mathbb{K}$ su cui è anche def. una funzione "norma" $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ con queste prop.:

- annullamento: $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall x \in X$
- omogeneità: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$
- disug. triangolare: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Sia K un insieme. Si dice che é uno spazio metrico se é definita una funzione (<u>DISTANZA</u>) $d: K \times K \to [0, +\infty)$ tale che:

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (proprietá di annullamento)
- $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria) con $x, y, z \in K$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (disuguaglianza triangolare)

Se X é uno sp. vett. normato, e poniamo $d(x,y) = \|x-y\|$, questa é una distanza

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x = y$$

$$d(y,x) = \|y-x\| = |-1|\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y) \qquad \text{con } x,y,z \in X$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| = \|x-z\| + \|z-y\| =$$
$$= d(x,z) + d(z,y)$$

$\Rightarrow$ Ogni sp. vettoriale normato é anche uno sp. metrico ponendo $\|x-y\| = d(x,y)$ ("distanza della norma")

Se (K, d) é uno sp. metrico e $K_0 \subseteq K$, anche (K_0, d) é metrico

Se $(X, \|...\|)$ é uno sp. vett. normato, é anche metrico, ogni suo sottoinsieme X_0 sarà metrico, ma in generale non sarà uno sp. vett.

sp. metrico $\not\Rightarrow$ sp. vett. (normato)
sp. vett. normato $\Longrightarrow$ sp. metrico
sp. vett e metrico $\not\Rightarrow$ sp. vett. normato

1.2

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno sp. vett. normato e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una successione di elementi di X. Si dice che la successione $\{x_n\}$ é di CAUCHY se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

ossia se: $\quad \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ per $n, m \longrightarrow \infty$

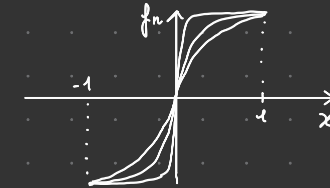
Sia (X, d) uno sp. metrico. Si dice che lo spazio é completo se ogni successione di Cauchy in X é convergente a qualche elemento di X

Se X é uno sp. vett. normato, completo (come sp. metrico), si dice che X é uno spazio di BANACH.

Esplicitamente: $(X, \|\ldots\|)$ sp. vett. normato. Se $\{x_n\}$ é di Cauchy, ossia $\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ per $n, m \longrightarrow \infty$, allora $\exists \bar{x} \in X$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$ cioé $\|x_n - \bar{x}\| \longrightarrow 0$

$X = C^0[-1,1]$ $\qquad f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} & \text{se } x \in [0,1] \\ -|x|^{1/n} & \text{se } x \in [-1,0) \end{cases}$ $\qquad \|f\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$

f_n é di Cauchy in questo sp. vett. normato infatti



$$\|f_n - f_m\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = 2\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 |x^{1/n} - x^{1/m}|\,dx = 2\int_0^1 (x^{1/n} - x^{1/m})\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^{1/n+1}}{1/n+1} - \frac{x^{1/m+1}}{1/m+1}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{\frac{1}{m}+1}\right) \xrightarrow{n,m\to+\infty} 2(1-1) = 0$$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x \in [-1,0) \end{cases}$$ infatti:

$$\|f_n - f\|_{L^1} = 2\int_0^1 |x^{1/n} - 1|\,dx = 2\int_0^1 (1 - x^{1/n})\,dx = 2\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right) \to 0$$

ma f é discontinua cioé $\notin C^0[-1,1]$ ovvero non esiste $g \in C^0[-1,1]$ t.c. $f_n \to g$ in norma L^1

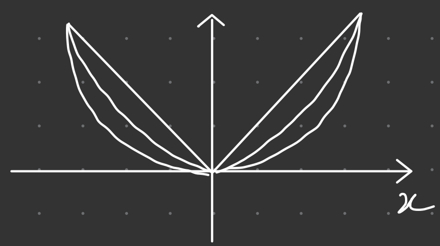
Si puó concludere che $\{f_n\}$ é di Cauchy ma non converge in C^0 con la norma L^1, quindi lo spazio normato NON é COMPLETO

$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ $\quad n = 1, 2, \dots$ $\quad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} |x| = f(x)$

$\| f_n - f \|_{C^0} = \max_{x\in[-1,1]} | f_n(x) - f(x) | \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

Quindi $f_n \in C^1[-1,1]$ converge in norma C^0 alla funzione $f \in C^0[-1,1]$ che però non è derivabile in $x=0$.

Si può concludere che C^1 (di $[a,b]$) con la norma C^0 <u>non</u> è completo.



1.3-4

Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ $n = 1, 2, 3 \dots$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che $f_n \to f$ puntualmente se

$\forall x \in I$ $\exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ o in altre parole

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Si dice che $f_n \to f$ uniformemente se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in I$ o in altre parole $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$ $\| f_n - f \|_{\infty} < \varepsilon$

Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ $n = 1, 2, 3 \dots$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e supponiamo che la succ. $\{f_n\}$ soddisfi:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in I$ (detta cond. di Cauchy per la conv. unif.)

Allora $\exists f : I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ uniformemente.

D: 1) mostriamo che $\exists f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ puntualmente in I
2) mostriamo che $f_n \to f$ unif.

1) Mostriamo che fissato comunque $\bar{x} \in I$, la succ. $f_n(\bar{x})$ è conv. (a un limite finito $f(\bar{x})$)

Hp: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \ \forall \underline{\underline{x}} \in I$
in particolare $|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| < \varepsilon$

ossia la succ $\{f_n(\bar{x})\}$ (è una succ. di num. reali) è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Ma $\mathbb{R}$ è COMPLETO
Quindi $\{f_n(\bar{x})\}$ è convergente a un certo limite $f(\bar{x})$.

$\bar{x}$ è un x qualsiasi in I, perciò ho provato che $\exists f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ puntualmente in I.

2) Mostriamo che $f_n \to f$ unif.

Hp: (*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in I$

$$\underbrace{\lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)|}_{|f_n(x) - f(x)|} \leq \varepsilon$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Abbiamo dimostrato che
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in I$ cioè $f_n \to f$ unif.

Lo spazio $\mathcal{C}^0[a,b]$ con la norma $\mathcal{C}^0$ è completo (spazio di Banach)

D: $\mathcal{C}^0[a,b]$ $\quad \|f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Sappiamo già che è uno sp. vett. normato
Mostriamo che è completo.

Sia $\{f_n\}$ di Cauchy in $\mathcal{C}^0[a,b]$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\|_{\mathcal{C}^0[a,b]} < \varepsilon$$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Allora la succ $\{f_n\}$ soddisfa la "cond. di Cauchy per la conv. unif." e per il teo. precedente $\exists f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ unif.

Poiché le f_n sono continue e $f_n \to f$ unif., anche f è continua ($f \in \mathcal{C}^0[a,b]$)

Dire che $f_n \to f$ unif. significa che $\|f_n - f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]} \to 0$ cioè $f_n \to f$ in $\mathcal{C}^0[a,b]$. Quindi $\{f_n\}$ è convergente in $\mathcal{C}^0$, e $\mathcal{C}^0[a,b]$ è completo.

1.4 - 5 - 6

CONTINUITÀ

Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e supponiamo che $f_n \to f$ unif. in I. Se tutte le f_n sono continue in $\bar{x} \in I$, allora anche f è continua in $\bar{x}$.

LIMITATEZZA

Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, $f : I \to \mathbb{R}$ e f_n limitate, se $f_n \to f$ unif allora anche f è limitata

INTEGRABILITÀ

Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabili e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se $f_n \to f$ unif in $[a,b]$ allora f è Riemann-integrabile e $\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ per $n \to +\infty$.

DERIVABILITÀ DEI LIMITI UNIF.

Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ derivabili nell'intervallo I e supponiamo che:

1) $\exists f : I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ punt. in I
2) $\exists g : I \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n' \to g$ unif. in I

Allora:

1) f è derivabile
2) $f' = g$ (perciò $f_n' \to f'$ unif.)
3) $f_n \to f$ unif.

es: $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}} \in C^1[-1,1]$ $\quad f_n(x) \to |x| = f(x)$ che non è derivabile

$f_n \to f$ unif.

$$f_n'(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^{1/n}\,\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right) x^{1/n} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^{1/n} & x<0 \end{cases} = f'$$

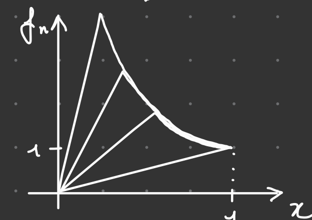
$f_n' \to f'$ solo puntualmente

es: $$f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} & \text{se } x\in[0,1] \\ -|x|^{1/n} & \text{se } x\in[-1,0) \end{cases} \in C^0[-1,1] \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x\in(0,1] \\ 0 & x=0 \\ -1 & x\in[-1,0) \end{cases}$$

$f_n \to f$ solo puntualmente, infatti $f \notin C^0[-1,1]$

es: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x\in\left(\frac{1}{n},1\right] \\ n^2 x & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x\in(0,1) \\ 0 & x=0 \end{cases} = f(x)$$



Ogni f_n è continua e limitata.

f è discontinua e illimitata.

1.5

CONTINUITÁ

Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$) e supponiamo che $f_n \to f$ unif. in I. Se tutte le f_n sono continue in $\bar{x} \in I$, allora anche f è continua in $\bar{x}$.

D: devo dimostrare che f é cont. cioé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in I \quad |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Suppongo che $f_n \to f$ unif. cioé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad t.c. \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{si ha } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Fissiamo n_0 come sopra e scriviamo

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})| + |f_{n_0}(\bar{x}) - f(\bar{x})|$$
$$< 2\varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})|$$

↳ disug. triang.

Poiché f_{n_0} é continua in $\bar{x}$, per $\varepsilon > 0$ fissato $\exists \delta > 0$ t.c.

$$|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\bar{x})| < \varepsilon$$

Allora se $|x - \bar{x}| < \delta$ si ha $|f(x) - f(\bar{x})| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$

Abbiamo dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x \in I \quad |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < 3\varepsilon$$

1.6

Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabili e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se $f_n \to f$ unif in $[a,b]$ allora f è Riemann-integrabile e $\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ per $n \to +\infty$. INTEGRABILITÀ

D: $$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \overset{\text{lin. dell' integ.}}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b-a) \longrightarrow 0$$ essendo la conv. uniforme

cioè $$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{C^0} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

1.7

$\mathcal{C}^0[a,b]$: sp. vett. normato (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ e $\|\cdot\|_{L^p}$) completo (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$)

$\mathcal{C}^0(a,b)$: sp. vett non normato

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$: sp. vett non normato

$\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R})$: sp. vett. normato (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$) completo (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$)

$\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$: sp. vett normato (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ e $\|\cdot\|_{L^p}$) non comple.

$\mathcal{C}^1[a,b]$: sp. vett. normato (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,1}}$ e $\|\cdot\|_{L^p}$) completo (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$)

$\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$: sp. vett. normato (con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^k}$ e $\|\cdot\|_{L^p}$) non completo

$$\mathcal{C}^\infty_0 \subset \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{C}^1[a,b] \subset \mathcal{C}^0[a,b] \subset \mathcal{C}^0(a,b)$$

2.1

Sia Ω un insieme qualsiasi. Si dice σ-algebra (in Ω) una qualsiasi famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω (cioè $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) tale che:

1) $\Omega \in \mathcal{M}$
2) $\forall A \in \mathcal{M}$ sia $A^c \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ chiusa per complementazioni)
3) $\mathcal{M}$ è chiusa per unioni numerabili, cioè se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $A_n \in \mathcal{M}$ allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Se Ω è un insieme e $\mathcal{M}$ una σ-algebra in Ω, $(\Omega, \mathcal{M})$ si dirà SPAZIO MISURABILE.

Gli elementi di $\mathcal{M}$ si chiameranno anche "insiemi misurabili".

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno sp. misurabile. Si dice misura su $(\Omega, \mathcal{M})$ una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ tale che μ sia numerabilmente additiva, cioè:

$$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \quad A_n \in \mathcal{M} \quad \text{si ha} \quad \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$$

$\downarrow$
a 2 a 2 disgiunti

Se μ è una misura su $(\Omega, \mathcal{M})$ si dirà che $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno SPAZIO DI MISURA

Misura del conteggio

Sia Ω qualsiasi, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mu(A) = \begin{cases} \text{se } A \text{ insieme finito, } \mu(A) = \text{n° di elementi di } A \\ \text{se } A \text{ " infinito, } \mu(A) = +\infty \end{cases}$$

Misura atomica di Dirac

Sia Ω qualsiasi, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$. Fissiamo un $x_0 \in \Omega$

"Misura di Dirac centrata in x_0" $\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$

Misura di Lebesgue

$(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ dove μ è la misura di Lebesgue

2.2

Esiste una σ-algebra $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ed esiste una misura μ su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ che chiameremo misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ con le seguenti proprietà:

1. La σ-algebra $\mathcal{L}$ contiene in particolare tutti gli insiemi aperti, chiusi, le unioni e intersezioni di famiglie numerabili di aperti o chiusi. (In pratica $\mathcal{L}$ contiene tutti gli insiemi che riusciamo a definire costruttivamente. Tuttavia è noto che $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$).

2. Se $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è una n-cella cioè: $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ allora $\mu(I) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \ldots \cdot |b_n - a_n|$.
Ne segue che la misura di Lebesgue degli insiemi elementari coincide con la misura elementare (aree di poligoni, volumi di poliedri, sfere ...).

3. μ è invariante per traslazioni.

4. La misura di Lebesgue è completa.

5. Se $E \in \mathcal{L}$, $\mu(E) = \inf \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \text{ dove } \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ sono n-celle e } \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset \right]$

2.3

Se $f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega s_k(x)\, d\mu(x)$$

dove $\{s_k\}$ é una successione monotona crescente di funzioni semplici convergente puntualmente (o unif. se f é limitata) ad f.

Una funzione si dice semplice se:

1) é misurabile, ovvero é misurabile uno (e quindi tutti) dei seguenti insiemi
$\{x \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \mid f(x) \leq a\}$, $\{x \mid f(x) > a\}$, $\{x \mid f(x) < a\}$

2) assume solo un numero finito di valori

Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ é integrabile, ovvero $|f(x)|$ é misurab. e $\int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) < +\infty$ si pone: $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega f^+(x)\, d\mu(x) - \int_\Omega f^-(x)\, d\mu(x)$

Se $f: \Omega \to \mathbb{C}$ é integrabile si pone:

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega Re[f(x)]\,d\mu(x) + i\int_\Omega Im[f(x)]\,d\mu(x)$$

$\in L^1(\Omega, m, \sigma)$

Date f, g integrabili si ha:

linearità

- $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\int_\Omega [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,d\mu(x) = c_1\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) + c_2\int_\Omega g(x)\,d\mu(x)$
- $f \leq g$ q.o in $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f(x)\,d\mu(x) \leq \int_\Omega g(x)\,d\mu(x)$

  $A \subseteq B$ e $f \geq 0 \Longrightarrow \int_A f(x)\,d\mu(x) \leq \int_B f(x)\,d\mu(x)$ monotonia
- $\mu(C) = 0 \Longrightarrow \int_C f(x)\,d\mu(x) = 0$

  $f \equiv 0$ q.o in $\Omega \Longrightarrow \int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = 0$ annullamento

  se $\int_\Omega |f(x)|\,d\mu(x) = 0 \Longrightarrow f(x) \equiv 0$ q.o. in Ω
- additività rispetto all'insieme di integrazione

2.4

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura (μ completa). LEBESGUE

Siano $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili e supponiamo che
$\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $f_n \to f$ per $n \to +\infty$ q.o. in Ω

Supponiamo che $\exists g \in L^1_*(\Omega)$ t.c. $|f_n(x)| \leq \underline{g(x)}$ $\forall n$ e
per q.o. $x \in \Omega$.

Allora le f_n sono integrabili, la f è integrabile,

$$\boxed{\int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu(x) \longrightarrow 0}$$ per $n \to +\infty$ e in particolare

$$\Longrightarrow \int_\Omega f_n(x) \, d\mu(x) \longrightarrow \int_\Omega f(x) \, d\mu(x)$$ <u>maggiorante integrabile</u> o <u>dominante integrabile</u>

Il teorema di Lebesgue della convergenza dominata è usato per dimostrare la continuità e derivabilità di integrali definiti da un parametro, come lo sono la trasformata di Fourier o di Laplace.

Infatti, entrambi i teoremi sulla continuità e derivabilità di funzioni integrali dipendenti da un parametro, scritte come

$$f(x) = \int_{\Omega} k(x,y)\, d\mu(y)$$

richiedono l'esistenza di un maggiorante integrabile di $|k(x_0,y)|$ e di $\left|\frac{\partial}{\partial x} k(x_0,y)\right|$ (per un intorno di x_0)

2.3

CONTINUITÀ INTEG. DIP. DA UN PARAM.

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura, $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e sia $K(x,y) : (a,b) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

1) $\forall x \in (a,b)$ $K(x,\cdot)$ è misurabile in Ω

2) Per q.o. $y \in \Omega$ $K(\cdot, y)$ è continua in x_0

3) $\exists\, g \in L^1(\Omega)$ e $\exists$ un intorno di x_0, $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ t.c.
$|K(x,y)| \leq g(y)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ per q.o. $y \in \Omega$

Allora $f(x) = \int_\Omega K(x,y)\, d\mu(y)$ è continua in x_0

D: Prendiamo una generica successione $\{x_n\} \subseteq (a,b)$, $x_n \to x_0$ e proviamo che $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \longrightarrow +\infty$, ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega K(x_n, y)\, d\mu(y) = \int_\Omega K(x_0, y)\, d\mu(y)$$

$K(x,y)$ è misurabile per ipotesi, e quindi lo è anche $K(x_n, y)$.

Essendo $k(\cdot, y)$ continua in x_0 per q.o. $y \in \Omega$, possiamo dire che

$$K(x_n, y) \longrightarrow K(x_0, y) \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty$$

Poiché $\exists\, g \in L^1(\Omega)$ t.c. $|K(x,y)| \leq g(y)$ per q.o. $y \in \Omega$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ allora è anche vero che, per n abbastanza grande, si avrà

$$|K(x_n, y)| \leq g(y) \quad \text{per q.o. } y \in \Omega$$

Allora per il teorema della convergenza dominata $K(x_n, y)$ (e ovviamente $K(x_0, y)$) sono integrabili e

$$\int_\Omega K(x_n, y)\, d\mu(y) \longrightarrow \int_\Omega K(x_0, y)\, d\mu(y)$$

ovvero: $\quad f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ cioè f è continua in x_0

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f \in L^1(\mathbb{R})$$

$y \mapsto f(y) e^{-2\pi i x y}$ è misurab. in $\mathbb{R}$ ($\forall x$ fissato)
$x \mapsto f(y) e^{-2\pi i x y}$ è cont. in $\mathbb{R}$ ($\forall y$ fissato)

$|f(y) e^{-2\pi i x y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f}$ è ben definita e $\hat{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$

DERIVAB. INTEG. DIP. DA UN PARAM.

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

$K: (a,b) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.:

1) $\forall x \in (a,b)$ $K(x,\cdot)$ é $L^1(\Omega)$

2) Per q.o. $y \in \Omega$ e $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\exists \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}$

3) $\exists g \in L^1(\Omega)$ t.c. $\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right| \leq g(y)$ per q.o. $y \in \Omega$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Allora $\exists f'(x_0) = \int_\Omega \frac{\partial K}{\partial x}(x_0,y)\, d\mu(y)$,

anzi $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\exists f'(x) = \int_\Omega \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\, d\mu(y)$.

D: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Sia $h_n \to 0$ e consideriamo

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \int_\Omega \frac{[K(x_0+h_n,y)-K(x_0,y)]}{h_n}\, d\mu(y) \quad (K \text{ integrabile})$$

$$F_n(y) = \frac{K(x_0+h_n,y)-K(x_0,y)}{h_n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\partial K}{\partial x}(x_0,y) \quad \left(\frac{\partial K}{\partial x} \text{ in } x_0 \ \exists \text{ per hp.}\right)$$

$\forall y \in \Omega$ fissato, per il teo. di Lagrange $\exists\ \bar{x}_n \in [x_0, x_0+h_n]$ t.c.

$$\frac{K(x_0+h_n, y) - K(x_0,y)}{h_n} = \frac{\partial K}{\partial x}(\bar{x}_n, y) \quad \text{dove } \bar{x}_n \to x_0 \text{ per } n \to +\infty$$

Poiché $\exists\ g \in L^1(\Omega)$ t.c. $\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right| \leq g(y)$ per q.o. $y \in \Omega$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ per n abbastanza grande possiamo dire

$$|F_n(y)| = \left|\frac{K(x_0+h_n, y) - K(x_0,y)}{h_n}\right| = \left|\frac{\partial K}{\partial x}(\bar{x}_n, y)\right| \leq g(y)$$

e si può quindi concludere che

$$f'(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega F_n(y)\, d\mu(y) = \int_\Omega \frac{\partial K(x_0,y)}{\partial x}\, d\mu(y)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy$

$\hat{f}$ é definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

Se $\hat{f}$ é derivabile, $\hat{f}' = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left[f(y) e^{-2\pi i x y}\right] dy = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i y f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy$

$$= -2\pi i \int y f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy$$

$y f(y)$ deve essere $L^1(\mathbb{R})$ affinché $\hat{f}'$ sia continua

$\Longrightarrow$ se $y f(y) \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$

2.6

Sia $f(x,y): \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile. FUBINI-TONELLI

1) Se $f(x,y) \geq 0$ in $\mathbb{R}^{2n}$ allora valgono le uguaglianze

$$\circledast \quad \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x,y)\,dx\,dy$$

dove ognuno dei termini può essere finito o meno.

2) Se f ha segno qualsiasi (o è complessa) e un integrale iterato di $|f(x,y)|$ è finito, allora vale $\circledast$ per $|f|$ e anche per f, e questi integrali sono finiti

3) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ allora valgono le conclusioni del p.to 2.

Usato nella dim. del teorema che afferma che la conv. di due f. L^1 è ancora L^1

Usato nelle dim. del teo. sulla relazione tra trasf. di Fourier e convoluzione.

2.7

Siano $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabili, si definisce convoluzione di f e g, e si scrive $f * g$, la funzione

$$\left[(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy \right]$$

(purché l'integrale converga, almeno per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$)

- commutativa $\quad f * g = g * f$
- associativa $\quad (f * g) * h = f * (g * h)$
- in $\mathbb{R}$, se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ simmetriche, vale la tabella:

$f * g$	f pari	f dispari
g pari	$f * g$ pari	$f * g$ dispari
g dispari	$f * g$ dispari	$f * g$ pari

- conv. di segnali: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau) u(t-\tau) g(\tau) u(\tau) \, d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) \, d\tau$

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, in particolare $|(f*g)(x)| < +\infty$ per q.o. x. Vale:

$$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

D: voglio dimostrare che $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| dx < +\infty$$

(supponendo $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ misurabile)

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\, dx \right) dy$$

teo. di Fubini-Tonelli (integr. iter. di $|f(x-y)g(y)| \geq 0$)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\, dz \right) dy$$

$x - y = z$, $dx = dz$

$$= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty \text{ per ipotesi}$$

Sia $p \in [1, +\infty]$. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora $\exists\, f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e vale: YOUNG

$$\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$$

2.8 - 9

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura (μ completa).

Diciamo che $f \in L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ o $L^p(\Omega)$ per un certo $p \in [1, +\infty)$ se

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile e $\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty$

↳ (funzioni "p-sommabili")

MINKOWSKY

Gli spazi $L^p(\Omega)$ sono sp. vett. normati (per $p \in [1, +\infty]$)

Inoltre sono sp. di Banach.

{ L^∞ è lo sp. delle f essenz. limitate cioè limitate q.o. }

HOLDER

Siano $p, q \in [1, +\infty]$ esponenti coniugati.

Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ allora $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$ e siano $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$.

Allora $L^{p_1}(\Omega) \supseteq L^{p_2}(\Omega)$ e $\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$

Gli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (0,1)$ sono spazi vettoriali, non normati in quanto non c'é una norma valida che rispetti la proprietà di diseg. triang.

Si può tuttavia def. una distanza come

$$d(f,g) = \int_\Omega |f-g|^p$$

Gli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (0,1)$ sono quindi un esempio di sp. vett. metrico non normato.

2.9

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura (μ completa).

Diciamo che $f \in L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ o $L^p(\Omega)$ per un certo $p \in [1, +\infty)$ se

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile e $\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty$

↳ (funzioni "p-sommabili")

$L^p(\Omega)$ con $p = +\infty$ è lo spazio delle funzioni essenzialmente limitate, ovvero si dice che $f \in L^\infty(\Omega)$ se f è misurabile e $\exists$ $K > 0$ t.c.

$$|f(x)| \leq K \text{ per q.o. } x \in \Omega$$

Si definisce $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{sup\,ess}} |f(x)| = \inf\{K > 0 \mid |f(x)| \leq K \text{ per q.o. } x \in \Omega\}$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura con $\underline{\mu(\Omega) < +\infty}$ e siano $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$.

Allora $L^{p_1}(\Omega) \supseteq L^{p_2}(\Omega)$ e $\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$

D: sia $f \in L^{p_2}(\Omega)$, voglio dimostrare che $\int_\Omega |f(x)|^{p_1} d\mu(x) < +\infty$

$$\int_\Omega |f(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_\Omega \underbrace{|f(x)|^{p_1} \cdot 1}_{\downarrow}\, d\mu(x)$$

Applico la disug. triang. di Holder a $|f|^{p_1}$ e 1:
scelgo $p = \frac{p_2}{p_1} > 1$ e sia q l'esp. coniugato di p.

$|f|^{p_1} \in L^p$ perché $\int_\Omega (|f(x)|^{p_1})^{\frac{p_2}{\cancel{p_1}}} d\mu(x) < +\infty$ poiché $f \in L^{p_2}$

$$\leq \left(\int_\Omega (|f(x)|^{p_1})^{p_2/p_1} d\mu(x) \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \left(\int_\Omega 1^q d\mu(x) \right)^{1/q}$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - p_1/p_2$$

$$= \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_2} d\mu(x) \right)^{p_1/p_2} \cdot \mu(\Omega)^{1 - \frac{p_1}{p_2}}$$

Elevando a $\frac{1}{p_1}$ ottengo: $\left(\int_\Omega |f(x)|^{p_1} d\mu(x) \right)^{1/p_1} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_2} d\mu(x) \right)^{1/p_2} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$

$$\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

(Il teo. dice che se il secondo membro finito lo è anche il primo)

Si definisce $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid f \text{ è misurab. e } \forall\, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ limitato è } f \in L^p(\Omega) \}$

Per gli sp. $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ valgono le stesse inclusioni degli sp. $L^p(\Omega)$ con Ω limitato, ovvero

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \supseteq L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \supseteq \dots \supseteq L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

3.1

Siano X e Y sp. vett normati e sia $T: X \to Y$ un op. lin. Sono equivalenti le seguenti condizioni:

1) T é cont. in 0 (cioé $\|x_n\|_X \to 0 \Rightarrow \|Tx_n\|_Y \to 0$)

2) T é cont. in ogni $\bar{x}$ di X (cioé $\forall\, \bar{x} \in X$ $\|x_n - \bar{x}\|_X \to 0 \Rightarrow \|Tx_n - T\bar{x}\|_Y \to 0$)

3) $\exists\, K > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X \quad \forall x \in X$
ossia $\sup\limits_{x \in X \setminus 0} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$

Siano X e Y sp. vett. normati e $T: X \to Y$ un operatore. Si dice che T é continuo (o limitató se vale una delle tre condizioni equivalenti del teorema precedente

In tal caso il numero $\sup\limits_{x \in X \setminus 0} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ si dice <u>norma dell'operatore T</u> e si indica con $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

$\mathcal{L}(X,Y) = \{ T : X \to Y \mid T$ é lin. continuo$\}$
= spazio di tutti gli op lin. continui tra X e Y

<u>es</u>: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$T_A : \vec{x} \longrightarrow A\vec{x}$ A: matrice $m \times n$

$(T_A \vec{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ con $i = 1, \dots, m$

$|(T_A\vec{x})_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$ $|a_{ij}| \leq K \quad \forall i,j$
$\leq K \sum_{j=1}^{n} |x_j| = K \|\vec{x}\|$

$\Longrightarrow \|T_A \vec{x}\| \leq c\|x\|$ T_A é continuo

<u>es</u>: Fissiamo una $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo l'operatore

$T_g : f \longmapsto f * g$ $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ (T é lin. per le proprietà dell' integr)

Essendo $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

$\|T_g f\|_{L^1} = \|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 = \|f\|_{L^1} \cdot K \Longrightarrow T_g$ é continuo

<u>es</u>: $T: \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$

$T: f(x) \longrightarrow x f(x), \quad f \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$

T è lineare, ma <u>non continuo</u>, cioè $\nexists\, K > 0$ t.c. $\forall f \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ sia $\| Tf \|_{\mathcal{C}^0} \leq K \| f \|_{\mathcal{C}^0}$ ovvero

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x f(x)| \leq K \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Costruiamo una successione di funzioni per cui

$$\sup_x |f_n(x)| = 1 \quad \sup_x |x f_n(x)| \longrightarrow +\infty \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad f_n(x) = f(x-n) \implies \sup_x |x f_n(x)| = n$$

dovremmo avere che $n \leq K \cdot 1$ per $n \to +\infty \implies$ <u>assurdo</u>

3.2

Sia X uno sp. vett normato su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$).
Si dice funzionale lineare continuo su X un operatore lineare continuo $T: X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

Esplicitamente: $T: X \to \mathbb{R}$

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 T f_1 + \lambda_2 T f_2$$

$\sup_{x \in X \setminus 0} \frac{|Tx|}{\|x\|_X} < +\infty$ o anche $\exists K > 0$ t.c. $\forall x \in X$ $|Tx| \leq K |x|_X$

In tal caso il numero $\sup_{x \in X \setminus 0} \frac{|Tx|}{\|x\|_X}$ si dice norma del funzionale

$$\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X' \text{ o } X^*$$ "spazio duale" di X

Il duale di uno sp. vett. normato è lo spazio di tutti i funzionali lineari continui su X

es: $X = C^1[-1,1]$ con norma C^1
$T : f \to f'(0)$ T é lineare
$|Tf| = |f'(0)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |f'(x)| \leq \|f\|_{C^1[a,b]}$ T é continua

es: funzionale "integrale definito" $X \in C^0[a,b]$ con norma C^0

$Tf = \int_a^b f(x)\,dx$ T é lineare

$|Tf| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{C^0[a,b]} \cdot |b-a|$ T é continua

es: $T : C^0_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ con norma L^1
$T : f \longmapsto f(0)$ T é detto "funzionale di valutazione"
T é lineare e ben definito. Per mostrare che non é continuo costruiamo una successione $f_n \in C^0_0(\mathbb{R})$ t.c.
$f_n(0) \to +\infty$ per $n \to +\infty$ ma $\int_{\mathbb{R}} |f_n| = 1\ \forall n$.

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_n(x) = n f(nx) \implies \begin{aligned} & f_n(0) = n \\ & \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx = 1 \\ & n \leq K \cdot 1 \\ & \downarrow \\ & \text{assurdo} \end{aligned}$$

4.1-3-4

Sia V uno sp. vett. (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).
Diciamo che V è uno sp. vett. con prodotto scalare se, oltre alle 2 operazioni di sp. vett., è def una terza operazione "prodotto scalare":

$$(\vec{u}, \vec{v}) : \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$$

e soddisfa queste proprietà:

1) $(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 (\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \lambda_2 (\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ (linearità sulla prima componente)
$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad u_1, u_2, v \in V$

2) a. se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ (proprietà commutativa)

b. se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad (\vec{u}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{u})}$ complesso coniugato

3) $(\vec{u}, \vec{u}) \geqslant 0 \quad \forall \vec{u} \in V \quad$ (e $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = 0$)

Sia V uno sp. vett. con prodotto scalare.
Allora:

1) Vale la "disuguaglianza di Cauchy-Schwartz":
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad |(\vec{u}, \vec{v})| \leq \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})} \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$

2) Se si definisce $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$, allora $\|\dots\|$ soddisfa le proprietà della norma

3) La norma definita qui sopra soddisfa l'"uguaglianza del parallelogramma":
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

Se V é uno sp. vett. con prodotto scalare metteremo in V la "norma del prodotto scalare"

V con questa struttura di sp. vett. normato in cui le norma proviene da un prodotto scalare si dice spazio pre-hilbertiano

Si dice spazio di Hilbert uno sp. pre-hilbertiano completo. Ossia: uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare es: $V = \mathbb{R}^n$ $\quad (\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ é un prod. scalare

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i u_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \quad \text{(norma euclidea)}$$

norma indotta dal prodotto scalare, $\mathbb{R}^n$ é completo
$\to$ V é di Hilbert

es: $V = \mathcal{C}^0[a,b]$ $\quad (f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} = \underline{\underline{\|f\|_{L^2(a,b)}}} \;!!$$

$\to$ La norma indotta da questo prodotto scalare é la norma L^2

$\mathcal{C}^0[a,b]$ con la norma L^2 <u>NON</u> é completo

Questo é un esempio di sp. pre-hilbertiano che non é di Hilbert es: $V = L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ $\quad (f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x)$ prod. scalare

Questo é un prod. scalare che induce la norma $L^2(\Omega)$.

Quindi <u>$L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é uno sp. di Hilbert</u> essendo L^2 completo

Se V é uno sp. pre-hilbertiano, la norma e il prod. scalare sono continui, cioé:

1) $\{x_n\} \subseteq V$ t.c. $x_n \to x$ (cioé: $\|x_n - x\| \to 0$) allora $\|x_n\| \to \|x\|$ per $n \to +\infty$.
"La convergenza in norma implica la convergenza delle norme"

2) $\{y_n\} \subseteq V$ t.c. $y_n \to y$ allora $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ per $n \to +\infty$.

D: 1) Per la disug. triang.

$$\big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \leq \|x_n - x\| \to 0 \quad \text{cioè} \quad \|x_n\| \to \|x\|$$

2) Hp: $x_n \to x \qquad y_n \to y$

Ts: $(x_n, y_n) \to (x, y)$

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)|$$

$$= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)|$$

$$\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)|$$

disug. di Cauchy-Schwarz

$$\leq \underbrace{\|x_n\|}_{\downarrow \, \|x\|} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\|x_n - x\|}_{\downarrow \, 0} \|y\| \longrightarrow 0$$

per $n \to +\infty$

4.2

PITAGORA 1

Sia V uno sp. pre-hilbertiano e siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vettori a 2 a 2 ortogonali cioè: $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Allora: $\| \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| \vec{v}_i \|^2$

D: $$\| \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i , \sum_{j=1}^{n} \vec{v}_j \right) \overset{\text{bilinearità}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\vec{v}_i, \vec{v}_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \| \vec{v}_i \|^2$$

PITAGORA 2

Sia H uno sp. di Hilbert, sia $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ e supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \| \vec{x}_n \|^2 < +\infty$ dove gli $\vec{x}_n$ sono ortog. a 2 a 2.

Allora $\exists \ \vec{x} \in H$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ in H

Inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} \| \vec{x}_n \|^2 = \| \vec{x} \|^2 = \| \sum_{n=1}^{\infty} \vec{x}_n \|^2$.

vuol dire che:

$$\vec{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k , \quad \| \vec{s}_n - \vec{x} \| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

D: devo dimostrare che $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $s_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k$ è converg. in H (a un certo $\vec{x}$).

Poiché H è completo, è sufficiente dimostrare che $\{s_n\}$ è di Cauchy cioè:

$$\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n, m \to +\infty$$

somme di un n° finito di vettori a 2 a 2 ortogonali

↓

applico il teo. di Pitagora - 1

$n > m$

$$\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \vec{x}_k - \sum_{k=1}^{m} \vec{x}_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \vec{x}_k \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \|\vec{x}_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\vec{x}_k\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \|\vec{x}_k\|^2 = \sigma_n - \sigma_m \longrightarrow 0$$

cioè σ_n è la successione delle somme parziali della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ che per ipotesi converge.

$\{\sigma_n\}$ è convergente, quindi è di Cauchy, quindi $\sigma_n - \sigma_m \to 0$.

Quindi anche $\|\vec{s}_n - \vec{s}_m\| \to 0$, cioè $\{\vec{s}_n\}$ è di Cauchy in H.

4.3

Uno sp. di Hilbert è uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare.

Sia V uno spazio pre-hilbertiano, dico che $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$ sono un sistema ortonormale se sono a 2 a 2 ortogonali e ciascuno ha norma 1

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

PROIEZIONI

Sia V uno sp. pre-hilbertiano, V_n un sottospazio n-dimensionale di V e sia $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ una base ortonormale di V_n.

$\forall \vec{u} \in V \quad \exists! \ \underline{\vec{v}} \in V$ tale che:

1) $\|\underline{\vec{v}} - \vec{u}\| = \min\{\|\vec{v} - \vec{u}\| \mid \vec{v} \in V_n\}$

2) $\underline{\vec{v}} - \vec{u} \perp V_n$ (cioè $(\vec{v} - \vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_n$)

3) $\underline{\vec{v}} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$

4) $\|\vec{v}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \|\vec{u}\|^2$

Sia H uno spazio di Hilbert, dico che $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{\infty} \in H$ sono un sistema ortonormale numerabile se sono a 2 a 2 ortogonali e ciascuno ha norma 1

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

Per ogni n fissato, sia V_n il sottospazio di H, n-dimensionale, che ha per base ortonormale $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

Definiamo la serie di Fourier dell'elemento $\vec{u} \in H$ come

$$P_{V_n} \vec{u} = \sum_{j=1}^{n} (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j$$

che é la proiezione di $\vec{u}$ sul sottospazio V_n

Inoltre $\| P_{V_n} \vec{u} \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \| (\vec{u}, \vec{e}_j) \vec{e}_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \| \vec{u} \|^2 \quad \forall n$

ovvero la serie é convergente e si ottiene

$$\underline{\sum_{j=1}^{\infty} |(\vec{u}, \vec{e}_j)|^2 \leq \| \vec{u} \|^2} \quad \underline{\text{disuguaglianza di Bessel}}$$

Per il teo di Pitagora, essendo $(\vec{u}, \vec{e}_j)\vec{e}_j$ una succ. di vettori a 2 a 2 ortog. la cui serie in norma converge, si ha che:

$$\exists\, \underline{\vec{u}} \in H \quad t.c. \ \sum_{j=1}^{\infty} (\vec{u}, \vec{e}_j)\, \vec{e}_j = \underline{\vec{u}}$$

4.4

Uno sp. di Hilbert é uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare.

Sia V uno spazio pre-hilbertiano, dico che $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$ sono un sistema ortonormale se sono a 2 a 2 ortogonali e ciascuno ha norma 1

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

Sia H uno sp. di Hilbert. Si dice che $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é un sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) se

1) $(\vec{e}_n, \vec{e}_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$ (s.o.n)

2) $\forall \vec{u} \in H$ se $(\vec{u}, \vec{e}_n) = 0 \ \forall n$ allora $\vec{u} = \vec{0}$

TRASF. DI FOURIER

Sia H uno sp. di Hilbert e $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un s.o.n.c. in H.

$\forall \vec{x} \in H$ definiamo $\hat{\vec{x}} = \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\hat{x}_n = (\vec{x}, \vec{e}_n)$.

Allora $\hat{\vec{x}} \in \ell^2$ ossia $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 < +\infty$. sp. di successioni

L'operatore $\mathcal{F}: H \longrightarrow \ell^2$ é lineare, iniettivo,
$\mathcal{F}: \vec{x} \longmapsto \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ suriettivo, conserva il prod. scalare e la norma

$$\left.\begin{aligned} &\forall \vec{x}, \vec{y} \in H \quad (\vec{x}, \vec{y})_H = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \overline{\hat{y}_n} = (\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}})_{\ell^2} \\ &\forall \vec{x} \in H \quad \|\vec{x}\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 = \|\hat{\vec{x}}\|_{\ell^2} \end{aligned}\right\}$$

In sintesi. l'operatore $\mathcal{F}$ é una isometria di sp. di Hilbert.
($\mathcal{F}$ si dice trasformata di Fourier sullo sp. di Hilbert)

Inoltre, $\forall \vec{x}$ si ha $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n$ cioé: la serie di Fourier di $\vec{x}$ converge a $\vec{x}$, $\forall \vec{x} \in H$

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| \vec{x} - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \vec{e}_j \right\|_H = 0$$

$\ell^2 = \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \}$

D: per il teo. di Pitagora $\forall \vec{x} \in H \quad \exists\, \underline{\vec{x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n$

- Mostriamo ora che se il s.o.n. è completo allora $\underline{\vec{x}} = \vec{x}$

Per def. di s.o.n.c. se dimostriamo che

$(\vec{x} - \underline{\vec{x}}, \vec{e}_n) = 0 \quad \forall n$ allora $\vec{x} - \underline{\vec{x}} = 0$ cioè $\vec{x} = \underline{\vec{x}}$

$$(\vec{x} - \underline{\vec{x}}, \vec{e}_n) = (\vec{x}, \vec{e}_n) - (\underline{\vec{x}}, \vec{e}_n) = \hat{x}_n - \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j \vec{e}_j, \vec{e}_n\right)}$$

$$\hat{x}_n = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j \underbrace{(\vec{e}_j, \vec{e}_n)}_{\delta_{j,n}}$$

$$= \hat{x}_n - \hat{x}_n = 0 \ \checkmark$$

Perciò $\forall \vec{x} \in H$ abbiamo $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n$
e per l'ortogonalità $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2$

- Inoltre $\|\mathcal{F}(\vec{x})\|_{\ell^2}^2 = \|\vec{x}\|_H^2$ perciò $\mathcal{F}$ è iniettivo $(\mathcal{F}(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0)$

- Per mostrare che $\mathcal{F}$ è suriettivo, supponiamo una successione $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n \vec{e}_n\|^2 < +\infty$

Quindi per Pitagora-2 $\exists\, \vec{x} \in H$ t.c. $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vec{e}_n$

Se mostriamo che $\hat{x}_n = \lambda_n$ abbiamo provato che $\mathcal{F}$ è suriettiva

$$\hat{x}_n = (\vec{x}, \vec{e}_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \vec{e}_j, \vec{e}_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\vec{e}_j, \vec{e}_n) = \lambda_n \checkmark$$

lin. e cont. del prod. scalare

- Mostriamo che $\mathcal{F}$ conserva il prod. scalare.

Siano $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Ts: $(\vec{x}, \vec{y})_H = (\mathcal{F}(\vec{x}), \mathcal{F}(\vec{y}))_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \overline{\hat{y}_n}$

Sappiamo già che $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono somma delle loro serie di Fourier:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \vec{e}_n, \sum_{m=1}^{\infty} \hat{y}_m \vec{e}_m\right) \overset{\text{bilin. e cont. del prod. scalare}}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{x}_n \vec{e}_n, \hat{y}_m \vec{e}_m)}_{\hat{x}_n \cdot \overline{\hat{y}_n} \cdot \delta_{n,m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \overline{\hat{y}_n}$$

5.1 - 2 - 3 - 4

Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\xi \cdot y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j\right)$$

$\hat{f}$ si dice trasformata di Fourier della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Inoltre, l'operatore $\mathcal{F}: f \longmapsto \hat{f}$ è un operatore lineare continuo con norma minore o uguale a 1 appartenente a $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}), C^0_*(\mathbb{R}))$ ovvero $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0_*(\mathbb{R})$

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\boxed{\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}}$

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \wedge C^0_*(\mathbb{R})$, f derivabile a tratti, $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
Allora $\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e
$(\hat{f}(\xi))' = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi)$

$$\mathcal{F}(f_a) = (\hat{f})^a \quad e \quad \mathcal{F}(f^a) = (\hat{f})_a$$

dove $\quad f_a(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \quad e \quad f^a(x) = f(ax) \quad \forall a > 0$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

D: $\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(y)\, e^{-2\pi i \xi y}\, dy =$

poiché $f \in \mathcal{C}^0_*(\mathbb{R})$ $\quad = \left[\cancel{f(y)\, e^{-2\pi i \xi y}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, 2\pi i \xi\, e^{-2\pi i \xi y}$

$$= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i \xi y}\, dy$$

D: $\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-2\pi i \xi y}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}\left(f(y)\, e^{-2\pi i \xi y}\right) dy =$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)(-2\pi i y)\, e^{-2\pi i \xi y}\, dy =$$

$$= \mathcal{F}(-2\pi i y f(y))(\xi)$$

5.2

Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\xi \cdot y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j\right)$$

$\hat{f}$ si dice trasformata di Fourier della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Inoltre, l'operatore $\mathcal{F}: f \longmapsto \hat{f}$ é un operatore lineare continuo con norma minore o uguale a 1 appartenente a $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}), C^0_*(\mathbb{R}))$ ovvero $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0_*(\mathbb{R})$

Se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a valori reali

$$\hat{f}(\xi) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y) \cos(2\pi \xi y)\, dy}_{Re[\hat{f}]} - i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y) \operatorname{sen}(2\pi \xi y)\, dy}_{Im[\hat{f}]}$$

Se f é anche pari: $Im[\hat{f}] = 0 \Rightarrow$ $\hat{f}$ é reale e pari

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cos(2\pi \xi y)\, dy = 2\int_0^{+\infty} f(y) \cos(2\pi \xi y)\, dy$$

Se f invece é dispari: $Re[\hat{f}] = 0 \Rightarrow$ $\hat{f}$ é immaginaria

$$\hat{f}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} f(y) \operatorname{sen}(2\pi \xi y)\, dy = -2i \int_0^{+\infty} f(y) \operatorname{sen}(2\pi \xi y)\, dy$$

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\boxed{\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}}$

D: $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quindi $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\exists\, \mathcal{F}(f*g)$

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi x} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) dx$$

é un integrale iterato

scambio l'ordine di integrazione

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) dy =$$

$x - y = z \qquad x = y + z$

$dx = dz$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi (y+z)} dz \right) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i \xi z} dz = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

Per poter scambiare l'ordine di integrazione devo verificare che l'integrale del modulo converge (teo. di Fubini-Tonelli):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \xi x}| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)| dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy = \qquad x - y = z$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz = \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1} < +\infty \quad \checkmark$$

Definiamo $f^a(x) = f(ax)$ $\quad f_a(x) = \frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a}\right)$ $\quad \forall a>0$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{F}(f^a)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(ax)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-2\pi i \frac{\xi}{a} y}\, dy$$

$ax = y$, $x = \frac{y}{a}$, $dx = \frac{dy}{a}$

$$= \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \hat{f}_a(\xi)$$

Analogamente: $\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \hat{f}^a(\xi)$ $\quad$ (con $f \in L^1(\mathbb{R})$)

5.3

Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\xi \cdot y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j\right)$$

$\hat{f}$ si dice trasformata di Fourier della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| = \|\hat{f}\|_{C^0} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \hat{f}$ é limitata.

$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\hat{f}$ é continua.

Per q.o. y fissata, la funzione $\xi \mapsto f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}$ é continua

$|f(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\hookrightarrow$ maggiorante integrab.

$\Big\}$ $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\hat{f}$ é continua

Possiamo concludere che:

$\mathcal{F}: f \longmapsto \hat{f}$

$\mathcal{F}: \underline{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \underline{C^0_*(\mathbb{R}^n)}$ lineare e continuo, con norma ≤ 1

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Allora $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

cioè $f(x) = \mathcal{F}(\hat{f}(\xi))(-x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \check{f}(x)$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ma $f \notin C^0_*(\mathbb{R}^n)$ certamente $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Per cui per ogni funzione discontinua non è garantito il teorema di inversione

es: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|} \in L^1(\mathbb{R})$ per cui è invertibile

(si noti che f è C^∞)

es: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\xi) = \frac{1}{1+2\pi i \xi} \notin L^1(\mathbb{R})$ non è invertibile

(si noti che $f \notin C^0$)

5.4

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e poniamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy \quad \text{per } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\xi \cdot y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j\right)$$

$\hat{f}$ si dice trasformata di Fourier della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Inoltre, l'operatore $\mathcal{F}: f \longmapsto \hat{f}$ è un operatore lineare continuo con norma minore o uguale a 1 appartenente a $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}), C^0_*(\mathbb{R}))$ ovvero $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C^0_*(\mathbb{R})$

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0_*(\mathbb{R})$, f derivabile a tratti, $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
Allora $\quad \mathcal{F}(f'(x))(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e

$$(\hat{f}(\xi))' = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi)$$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f'(x) = -2x e^{-x^2} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -2x f(x)$$

$$\underbrace{\mathcal{F}(f'(x))}_{2\pi i \xi \hat{f}(\xi)} = \underbrace{\mathcal{F}(-2x f(x))}_{\frac{1}{\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)}$$

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi i}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) \implies \hat{f}'(\xi) = -2\pi^2 \xi \hat{f}(\xi)$$

eq. diff del primo ordine

$$\int \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -2\pi^2 \int \xi \, d\xi$$

$$\ln|\hat{f}(\xi)| = -\pi^2\xi^2 + c \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi^2}}$$

$$\hat{f}(\xi) = c_1 e^{-\pi^2\xi^2}$$

$$\hookrightarrow \hat{f}(0) = c_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|\vec{x}|^2}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\, e^{-2\pi i(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\ldots+\xi_n x_n)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \hat{g}(\xi_1)\cdot\hat{g}(\xi_2)\cdot\ldots\cdot\hat{g}(\xi_n) =$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi_1^2}\cdot\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi_2^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\xi_n^2} = \pi^{\frac{n}{2}}\, e^{-\pi^2|\vec{\xi}|^2}$$

$$f(\vec{x}) = e^{-|\vec{x}|^2} \qquad f^{\sqrt{\alpha}}(\vec{x}) = e^{-\alpha|\vec{x}|^2}$$

$$\mathcal{F}\left(f^{\sqrt{\alpha}}\right) = \left(\hat{f}\right)_{\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\alpha}^n}\, e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}|\vec{\xi}|^2} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}|\vec{\xi}|^2}$$

5.5-6

Spazio di Schwartz (delle funz a decrescenza rapida):

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ (o\ \mathbb{C}) \ \middle| \ \begin{array}{l} 1)\ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ 2)\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ \forall \text{ multiindice } \alpha \\ \quad \lim_{|x| \to +\infty} |x|^k \left| \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha} \right| = 0 \end{array} \right\}$$

Se $f \in S(\mathbb{R})$ allora $x^n f(x) \in S(\mathbb{R})$ e $\frac{d^n}{dx^n} f(x) \in S(\mathbb{R})$ $\forall n = 1, 2 \dots$

$S(\mathbb{R}^n)$ é uno sp. vett. normato (con infinite norme) ma non completo.

$S(\mathbb{R}^n)$ é uno sp vettoriale, denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [1, +\infty)$ cioé:

$S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [1, +\infty]$ e
$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty)$ $\exists \{f_k\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

1) Sia $f \in S(\mathbb{R}^n)$ allora anche $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ cioé

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$$

2) $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ vale la formula di inversione cioé

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3) $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ é (lineare) biunivoco $\to$ isomorfismo di spazi vettoriali

4) $\mathcal{F}$ conserva il prod. scalare e la norma $L^2(\mathbb{R}^n)$
cioé:

$$\forall f, g \in S(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\,\overline{\hat{g}(x)}\,dx$$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

In particolare $\mathcal{F}$ (con questa norma in $S(\mathbb{R}^n)$) é un op. lin. continuo con norma 1 (isometria lineare).

($S(\mathbb{R}^n)$ con prod. scalare e norma L^2 é uno sp. pre-hilbertiano, non completo)

D: 1) Proviamo che $f \in S(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$

$f \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists \hat{f}$ $\qquad$ $n=1$, per semplicità

$x^n f(x)$ è cont. ed è $o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $x \to \pm\infty$ $\forall k$
quindi $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$ $\forall n$ $(\hat{f} \in C^\infty)$

Devo dim. che $|\xi|^n \left| \frac{d^k \hat{f}(\xi)}{d\xi^k} \right| \longrightarrow 0$ per $|\xi| \to \infty$

$$\frac{d^k \hat{f}(\xi)}{d\xi^k} = \mathcal{F}\Big(\underbrace{(-2\pi i x)^k f(x)}_{g}\Big)(\xi) = \hat{g}(\xi) \quad \text{con } g \in S(\mathbb{R})$$

$c \cdot x^k f(x) \in S(\mathbb{R})$

Allora devo mostrare che $|\xi|^n \hat{g}(\xi) \to 0$ per $|\xi| \to \infty$.

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n g(x)}{dx^n}\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{g}(\xi) \in C^0_*(\mathbb{R}) \text{ ovvero:}$$

$\frac{d^n g(x)}{dx^n} \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$

$c \cdot \xi^n \hat{g}(\xi) \to 0$ per $\xi \to \pm\infty$ ✓

2) $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$
quindi poiché f e $\hat{f}$ stanno in L^1 vale la formula di inversione

3) $\mathcal{F}$ è lineare e iniettiva (su tutto L^1).
Dobbiamo provare che $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ è suriettiva

ovvero: $\forall g \in S(\mathbb{R}) \ \exists f \in S(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{f} = g$

Per g assegnato, cerco f t.c. $\hat{f} = g$

Se $\hat{f}(x) = g(x)$ allora $\hat{\hat{f}}(x) = \hat{g}(x)$ ma $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$
e quindi la f che cerco deve essere $f(x) = \hat{g}(-x)$.
ho trovato la f.

4) Mostriamo che $\forall f, g \in S(\mathbb{R})$ è $\int_{\mathbb{R}} f\bar{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\,\bar{\hat{g}}$

da questo ponendo $f = g$ $\quad \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2\right)^{1/2}$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Abbiamo visto che:
$\forall f, g \in L^1$ è $\int_{\mathbb{R}} f \cdot \hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g \ \to \ \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\, \bar{\hat{g}} = \int_{\mathbb{R}} f\, \hat{\bar{\hat{g}}}$
bisogna dim. che $\bar{g} = \hat{\bar{\hat{g}}}$

$$\bar{\hat{g}}(x) = \overline{\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i x y}}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(y)}\, e^{2\pi i x y}\, dy = \hat{\bar{g}}(-x)$$

$\to \ \hat{\bar{\hat{g}}}(x) = \hat{\hat{\bar{g}}}(-x) = \bar{g}(x)$ ✓

D: Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Voglio definire $\hat{f}$

Faccio così: sia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c. $f_k \xrightarrow{L^2} f$, $\|f_k - f\|_{L^2} \to 0$ $(*)$

(si può fare perché $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$)

Calcoliamo $\hat{f}_k$. Considero la succ. $\{\hat{f}_k\} \overset{\subseteq S \subseteq L^2}{\subseteq} L^2(\mathbb{R}^n)$.

Se dimostro che $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy in L^2, esisterà $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\hat{f}_k \xrightarrow{L^2} g$.

↳ che è completo

$$
\begin{tikzcd}
S(\mathbb{R}^n) & & L^2(\mathbb{R}^n) \\
f_k \; ② \arrow[rr, "L^2"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & & f \; ① \\
\hat{f}_k \; ③ \arrow[rr, "L^2"] & & g \; ④ = \hat{f}
\end{tikzcd}
$$

f_k è conv. per hp. $(*)$ se è conv. allora è anche di Cauchy

Mostriamo che $\{\hat{f}_k\}$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f_k - f_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_k - f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k,m \to \infty} 0$$

linearità di $\mathcal{F}$ $\quad$ $(f_k - f_m) \in S(\mathbb{R}^n)$ $\quad$ su $S(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}$ è un'isometria

Quindi $\{\hat{f}_k\}$ é di Cauchy, $\exists g \in L^2$ t.c. $\|\hat{f}_k - g\|_{L^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Porremo, per definizione, $\hat{f} =: g$.

<u>Problema</u>: siamo sicuri che il limite non dipende dalla particolare successione f_k scelta?

Se prendo una diversa succ. $\{f_k^*\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ t.c.

$\|f_k^* - f\|_{L^2} \to 0$ allora come prima $\exists g^* \in L^2$ t.c.

$\hat{f}_k^* \xrightarrow{L^2} g^*$. É vero che $g^* = g$? Mostriamo che é cosí.

$\|\hat{f}_k^* - \hat{f}_k\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f_k^* - f_k)\|_{L^2} = \|f_k^* - f_k\|_{L^2} \longrightarrow 0$ perché $\begin{matrix} f_k \\ f_k^* \end{matrix} \rightrightarrows f$

Quindi anche $\hat{f}_k^*$ e $\hat{f}_k$ hanno lo stesso limite g.

In sintesi: utilizzando il fatto che $S(\mathbb{R}^n)$ é denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e che $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ é un'isometria lineare abbiamo dimostrato che $\mathcal{F}$ si può estendere univocamente a un operatore $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.

5.7

Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_k\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ é tale che $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ si definisce la trasformata di Fourier di f come il limite in $L^2(\mathbb{R}^n)$ della trasformate di f_k, ovvero

$$\hat{f}_k \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^n)} \hat{f}$$

L'operatore $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é lineare, biunivoco, conserva il prod. scalare e la norma.

$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é $\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \bar{\hat{g}}$ e $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

$\mathcal{F}$ é un'isometria lineare di sp. di Hilbert.

$\forall f \in L^2$ vale la formula di inversione, cioé

$\hat{\hat{f}}(-x) = f(x)$ in L^2 cioé per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ i due modi di definire la trasf. di Fourier coincidono.

5.8

Sia $f \in S(\mathbb{R})$. Allora: PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

D: $\|f\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot |f(x)|^2 dx = \cancel{\left[x |f(x)|^2\right]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx}(|f(x)|^2) dx =$

$\cancel{\left[x |f(x)|^2\right]_{-\infty}^{+\infty}} \to 0$ perché $f \in S(\mathbb{R})$

$$= -\int_{\mathbb{R}} x \underbrace{\left(f(x)\overline{f(x)}\right)'}_{f'\overline{f} + f\cdot\overline{f}' = f'\overline{f} + \overline{\overline{f}f'} = 2\,\mathrm{Re}[f'\overline{f}]} dx$$

$x + \overline{x} = 2\,\mathrm{Re}[x]$

$$\leq \left|2\,\mathrm{Re}\left[\int_{\mathbb{R}} x f'(x)\overline{f(x)} dx\right]\right| \leq 2\int_{\mathbb{R}} |x||f'(x)||f(x)| dx$$

disug. di Schwartz $\longrightarrow$

$$\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\|f'\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f')\|_{L^2} = \|2\pi i \xi \hat{f}\|_{L^2} = 2\pi \|\xi \hat{f}\|_{L^2}$$

$$\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \checkmark$$

Se trovo una $f(x) \in S(\mathbb{R})$ per cui si ha:

$$\| f \|^2_{L^2} = 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \circledast$$

vuol dire che la disuguaglianza è ottimale, cioè non è migliorabile.

$\longrightarrow$ $\forall \alpha > 0$ la funzione $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ soddisfa $\circledast$

Verifichiamolo per $\alpha = \pi$:

$f(x) = e^{-\pi x^2}$ $\qquad$ $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} = f(\xi)$

$$4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = 4\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx =$$

$$= 4\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} (-x) \underbrace{(-4\pi x e^{-2\pi x^2})}_{(e^{-2\pi x^2})'} dx =$$

$$= \cancel{\left[-x e^{-2\pi x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{\mathbb{R}} (-e^{-2\pi x^2}) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 dx = \| f \|^2_{L^2}$$

6.1 - 2 - 3

Sia $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), f misurabile e Lebesgue-integrabile su ogni intervallo del tipo $[0, K]$ per $K > 0$.
Si dice che f é Laplace-trasformabile se $\exists s_0 \in \mathbb{C}$ tale che l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\, dt$$

sia convergente per Lebesgue, ovvero: $\int_0^{+\infty} |e^{-s_0 t} f(t)|\, dt < +\infty$

Sia $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione L-trasformabile.
Si definisce ascissa di convergenza di f il numero reale

$$\sigma[f] = \inf \left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)|\, dt < +\infty \right\}$$

Il semipiano di convergenza di una certa f L-trasformabile é il semipiano nel campo complesso così definito:

$$\pi_f = \{ s \in \mathbb{C} \mid Re[s] > \sigma[f] \}$$

Se f é $\mathcal{L}$-trasformabile $\underline{\forall s \in \Pi_f}$ esiste finito l'integrale

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \mathcal{L} f(s)}$$

detto <u>trasf. di Laplace di f.</u>

$$\mathcal{L} f(\sigma + i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t\sigma} e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} \left[u(t) f(t) e^{-t\sigma}\right] e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}\left[u(t) f(t)\, e^{-t\sigma}\right]\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

D: Sia $\sigma_0 > \sigma[f]$ con f $\mathcal{L}$-Trasformabile
e supponiamo che sia $\mathcal{L} f(\sigma_0 + i\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

Per la relazione con la trasf. di Fourier si ha
$\Longrightarrow \mathcal{F}\left[u(t) f(t) e^{-t\sigma_0}\right] \equiv 0$

Essendo $\mathcal{F}$ iniettiva, $\mathcal{F}(f) = 0 \iff f = 0$ quindi
$\Longrightarrow u(t) f(t) e^{-t\sigma} = 0$ per q.o. $t \in \mathbb{R}$
ovvero $f(t) = 0$ per q.o. $t > 0$

Per cui anche $\mathcal{L}$ é iniettiva

6.2

Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile.
Si definisce ascissa di convergenza di f il numero reale

$$\sigma[f] = \inf\left\{ s\in\mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^{+\infty} e^{-st}|f(t)|\,dt < +\infty \right\}$$

Se f é $\mathcal{L}$-trasformabile $\forall s$ t.c. $Re\{s\} > \sigma[f]$ esiste finito l'integrale

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \mathcal{L}f(s)}$$

detto trasf. di Laplace di f.

Siano f, g due segnali $\mathcal{L}$-trasf. Allora anche $f*g$ lo é e $\forall s$ t.c. $Re\{s\} > \max(\sigma[f], \sigma[g])$

$$\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}f(s)\cdot\mathcal{L}g(s)$$

D:

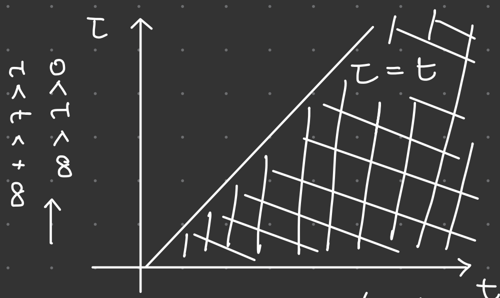
$$\mathcal{L}(f*g)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}(f*g)(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right)dt =$$

$0<t<+\infty$
$0<\tau<t$

$0<\tau<+\infty$
$\tau<t<+\infty$

$$\overset{\#}{=} \int_0^{\infty} \underset{\tau>0}{g(\tau)}\left(\int_\tau^{\infty} \underset{t-\tau>0}{f(t-\tau)}\, e^{-st}\,dt\right)d\tau =$$



$\longrightarrow$ $0<t<+\infty$
$0<\tau<t$

$t-\tau=u$
$dt=du$

$$= \int_0^{+\infty} g(\tau)\left(\int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-s(\tau+u)}\,du\right)d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} g(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau \int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-su}\,du =$$

$$= \mathcal{L}g(s)\cdot\mathcal{L}f(s)$$

\# per garantire questo passaggio applico Fubini–Tonelli, cioè controllo che converga l'integ. iterato del modulo

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)|\,e^{-\tau \mathrm{Re}\{s\}}\,d\tau \cdot \int_0^{+\infty} |f(u)|\,e^{-u\mathrm{Re}\{s\}}\,du < +\infty$$ poiché per hp.:

$$|e^{-s\tau}| = e^{-\mathrm{Re}\{s\}\tau}$$

$$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma[f] \text{ e } \mathrm{Re}\{s\} > \sigma[g]$$

Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasf. e sia $F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$.
Allora F è $\mathcal{L}$-trasf. e $\forall s$ t.c. $Re\{s\} < \max(\sigma[f],0)$ si ha

$$\mathcal{L}F(s)=\frac{\mathcal{L}f(s)}{s}$$

D: se f è $\mathcal{L}$-trasf. allora è integrabile e F è quindi ben def.

Fissato s come da ipotesi:

$$\mathcal{L}F(s)=\underset{0<t<+\infty}{\int_0^{+\infty}} e^{-st}\underset{0<\tau<t}{\int_0^t} f(\tau)\,d\tau\,dt \overset{*}{=} \underset{0<\tau<+\infty}{\int_0^{+\infty}} f(\tau)\underset{\tau<t<+\infty}{\int_\tau^{+\infty}} e^{-st}\,dt\,d\tau = \int_0^{+\infty} f(\tau)\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_\tau^{+\infty} d\tau$$

$$=\int_0^{+\infty} f(\tau)\left(+\frac{e^{-s\tau}}{s}\right)d\tau = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} f(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau = \frac{1}{s}\mathcal{L}f(s)$$

* Per garantire questo passaggio, calcoliamo l'integ. dei moduli per potere applicare il teo di Fubini-Tonelli

$$\int_0^{+\infty}|f(\tau)|\left(\int_\tau^{+\infty}e^{-Re\{s\}t}\,dt\right)d\tau=\int_0^{+\infty}|f(\tau)|\,\frac{e^{-Re\{s\}\tau}}{Re\{s\}}\,d\tau<+\infty \quad \checkmark$$

Sia $f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$-trasf. Allora $\forall a \in \mathbb{C}$ anche $f(t)e^{at}$ è $\mathcal{L}$-trasf e: S-SHIFT

$$\mathcal{L}(f(t)e^{at}) = \mathcal{L}f(s-a) \quad \forall s \text{ t.c. } Re\{s\} > Re\{a\} + \sigma[f]$$

D: $\mathcal{L}(f(t)e^{at})(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{at}\, e^{-st}\, dt = \mathcal{L}f(s-a), \quad Re\{s-a\} > \sigma[f]$

6.3

Sia $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile.
Si definisce ascissa di convergenza di f il numero reale

$$\sigma[f] = \inf\left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)| \, dt < +\infty \right\}$$

Se f é $\mathcal{L}$-trasformabile $\forall s$ t.c. $Re\{s\} > \sigma[f]$ esiste finito l'integrale

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \, dt = \mathcal{L} f(s)}$$

detto <u>trasf. di Laplace di f.</u>

Sia $f \in \mathcal{C}^0[0, +\infty)$ derivabile a tratti e f' sia $\mathcal{L}$-trasf.
Allora anche f è $\mathcal{L}$-trasf e $\forall s$: max $(\sigma[f'], 0)$ si ha

$$\mathcal{L} f'(s) = s \mathcal{L} f(s) - f(0)$$

D: $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\,d\tau \longrightarrow \mathcal{L}(f(t) - f(0)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f'(\tau)\,d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}f'(s)}{s}$

$f \in C^1(0,+\infty)$ o almeno: $f \in C^0[0,+\infty)$ e f derivabile a tratti

teo. della trasf. della primitiva

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t) - f(0)) = \mathcal{L}f(s) - \frac{f(0)}{s} = \frac{\mathcal{L}f'(s)}{s}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}f'(s) = s\,\mathcal{L}f(s) - f(0)$$

Sia $f \in C^{n-1}[0,+\infty)$ e sia $f^{(n-1)}$ derivabile a tratti e sia $f^{(n)}$ $\mathcal{L}$-trasf. Allora sono $\mathcal{L}$-trasf. anche $f, f', \dots, f^{(n)}$ e vale:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Sappiamo che $\forall f$ $\mathcal{L}$-trasf è $\mathcal{L}f(s) \to 0$ per $Re\{s\} \to +\infty$

Se f soddisfa le hp. dell'ultimo teorema, ho che

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) \to 0 \quad \text{per } Re\{s\} \to +\infty$$

quindi anche $s^n \mathcal{L}f(s) - \{s^{n-1} f(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)\}$ tenderà a zero.

regolarità di f in 0

<u>Se $\{\ldots\}$ fosse zero</u>, avrei che $s^n \mathcal{L}f(s) \to 0$ per $Re\{s\} \to +\infty$

cioè $\mathcal{L}f(s) = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$ per $Re\{s\} \to +\infty$

$\Longrightarrow$ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia $f \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $f = 0$ per $t<0$ e $f^{(n-1)}$ deriv. a tratti con $f^{(n)}$ $\mathcal{L}$-trasf.

Allora $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}f(s)$ e in particolare $\mathcal{L}f(s) = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$ per $Re\{s\} \to +\infty$

Questo criterio permette di prevedere la convergenza a 0 per $s \to +\infty$ a partire dalla derivabilità di $f(t) \cdot u(t)$.

Infatti, se considerassimo ad esempio il seno e il coseno, due funzioni del tutto simili, ci si potrebbe aspettare che la loro trasformata converga a 0 con la stessa rapidità.
In realtà, mentre $\sin(t)$ e $\cos(t)$ sono $C^\infty(\mathbb{R})$, $u(t)\sin(t)$ e $u(t)\cos(t)$ non lo sono, e anzi la prima è solo $C^0(\mathbb{R})$ e derivab. a tratti, la seconda non è nemmeno C^0.

Per questo, possiamo prevedere che $\mathcal{L}(\sin(t)u(t))(s)$ sarà un $o\left(\frac{1}{s}\right)$ mentre $\mathcal{L}(\cos(t)u(t))(s)$ sarà solo un $o(1)$

7.1

Lo spazio $D'(\Omega)$ è l'insieme di tutti i funzionali lineari $T: D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) continui rispetto alla convergenza definita in $D(\Omega)$, cioè tali che se

$$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in D(\Omega) \text{ e } \varphi \in D(\Omega), \quad \varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ in } D(\Omega) \text{ allora } T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$$

$D(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni test su Ω definito come

$$D(\Omega) = \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega) \qquad \text{con } \Omega \in \mathbb{R}^n$$

$D(\Omega)$ è uno sp. normato ma non completo, per cui viene data una def "ad hoc" di convergenza in $D(\Omega)$ ovvero:

$$\{\varphi\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(\Omega) \text{ e } \varphi \in D(\Omega)$$

Si dice che $\varphi_n \xrightarrow{n \to +\infty} \varphi$ in $D(\Omega)$ se:

1) $\exists\, K \subseteq \Omega$ che contiene il supporto di φ e di tutte le φ_n

2) In K $\varphi_n \xrightarrow{n \to +\infty} \varphi$ uniform. e $D^{\alpha}\varphi_n \xrightarrow{n \to +\infty} D^{\alpha}\varphi$ uniform. $\forall$ multiindice α

Mostriamo come le funzioni si identificano in una certa classe di distribuzioni:

Sia $\boxed{f \in L^1_{loc}(\Omega)}$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) f misurab.

$\hookrightarrow f \in L^1(K) \ \forall K \subseteq \Omega$ chiuso e limitato

$$\underset{L^1_{loc}(\Omega)}{f} \rightsquigarrow \underset{D'(\Omega)}{T_f} : \underset{D(\Omega)}{\varphi} \longmapsto \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad T_f \text{ lineare}$$

Se $\{\varphi_n\} \subseteq D(\Omega)$ e $\varphi_n \to 0$ in $D(\Omega)$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_K |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leq \underset{\downarrow\, 0}{\|\varphi\|_{C^0(K)}} \underbrace{\int_K |f(x)|\,dK}_{\text{limitato } (L^1(K))} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow T_f \in D'(\Omega)$

Perciò ogni funz. $\underline{L^1_{loc}(\Omega)}$ si può vedere come particolare distribuzione (ma NON ogni distribuz si potrà vedere come funzione!)

Mostriamo come le misure si identificano in una certa classe di distribuzioni.

In $\mathbb{R}^n$, consideriamo una misura μ tale che
$\llbracket \mu(E) < +\infty$ se E é un insieme misurabile e limitato$\rrbracket$

$$\mu \longrightarrow T_\mu : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu(x) = \langle T_\mu, \varphi \rangle$$

$$|\langle T_\mu, \varphi\rangle| \leq \int_{supp(\varphi)} |\varphi(x)|\, d\mu(x) \leq \|\varphi\|_{C^0} \cdot \underbrace{\mu(supp(\varphi))}_{<+\infty}$$

$\Rightarrow$ T_μ é ben definita e ovviamente lineare

Se $\varphi_n \to 0$ in $D(\mathbb{R}^n)$, $|\langle T_\mu, \varphi_n\rangle| \leq \|\varphi_n\| \mu(K)$ $(K \supseteq supp(\varphi_n)\ \forall n)$

$\Rightarrow$ T_μ é una distribuzione

Ogni misura <u>finita sui limitati</u> si puó vedere come particolare distribuzione

Se $d\mu(x) = \rho(x)\, dx$ con $\rho \in L^1_{loc}$ rientra nel caso prec.

7.2-3

Se $T \in D'(\mathbb{R})$, vogliamo definire T'

Ci aspettiamo che se $T = T_f$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $(T_f)' = T_{f'}$

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f'(x)}_{C^0(\mathbb{R})} \underbrace{\varphi(x)}_{C_0^\infty(\mathbb{R})} dx = \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx = \quad \mathrm{supp}(\varphi) = [a,b]$$

$$= \cancel{\left[f(x)\varphi(x)\right]_a^b} - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Quindi se $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle \underset{\text{voglio che sia}}{=} \langle (T_f)', \varphi \rangle$$

Allora se $T \in D'(\mathbb{R})$, T distribuzione <u>qualsiasi</u>

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ perciò $\exists \langle T, \varphi' \rangle$

$\Longrightarrow$ T' è ben def.

la derivata è lineare

$$\langle T', \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \rangle = -\langle T, (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)' \rangle = -\langle T, \lambda_1\varphi_1' + \lambda_2\varphi_2' \rangle =$$

$$= -\lambda_1\langle T, \varphi_1' \rangle - \lambda_2\langle T, \varphi_2' \rangle = \lambda_1\langle T', \varphi_1 \rangle + \lambda_2\langle T', \varphi_2 \rangle$$

$\Longrightarrow$ T' è lin. su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

Sia $\{\varphi_n\} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$. Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$ anche $\varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$

Quindi $\langle T', \varphi_n \rangle = -\langle T, \varphi_n' \rangle \longrightarrow 0$ (essendo T continuo su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)

$\Longrightarrow$ T' è continuo su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se definiamo $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ otteniamo che $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Ogni distribuzione è derivabile, e la sua derivata è a sua volta una distribuzione. Quindi ogni distribuzione è derivabile infinite volte

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

$$\langle T'', \varphi \rangle = -\langle T', \varphi' \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle$$

In conclusione: $\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^{(n)} \langle T, \varphi^{(n)} \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

Se invece $T \in D'(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo la derivata di una distribuzione in modo analogo al caso unidim. come:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle \quad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n$$

o nel caso di derivate di ordine superiore come

$$\langle \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \rangle \quad \forall \alpha \text{ multi indice}$$

7.3

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ne definiamo la derivata così:

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$f(x) = |x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \varphi'(x) \, dx - \int_{0}^{+\infty} x \varphi'(x) \, dx =$$

$$= \cancel{\left[x \varphi(x) \right]_{-\infty}^{0}} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) \, dx - \left\{ \cancel{\left[x \varphi(x) \right]_{0}^{+\infty}} - \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \, dx \right\}$$

$$= - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) \, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(x) \varphi(x) \, dx$$

$$\langle (T_{|x|})', \varphi \rangle = \langle T_{\operatorname{sign}(x)}, \varphi \rangle \longrightarrow \boxed{(T_{|x|})' = T_{\operatorname{sign}(x)}}$$

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$ in 0 non mi importa se è definita q.o. $\quad (T_u)' = ?$

$$< (T_u)', \varphi > = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, \varphi'(x)\, dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx =$$

$$= - [\cancel{\varphi(+\infty)} - \varphi(0)] = \varphi(0) = < T_{\delta_0}, \varphi >$$

$$\boxed{(T_u)' = T_{\delta_0}}$$

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Valgono i seguenti enunciati per il calcolo di $(T_f)'$.

1. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $(T_f)' = T_{f'}$

2. Se $f \in C^1$ tranne in un punto angoloso x_0 in cui è continua allora $(T_f)' = T_{f'}$ dove f è definita q.o.

3. Se $f \in C^1$ tranne in un punto x_0 di discontinuità salto allora $(T_f)' = T_{f'} + (f(x_0^+) - f(x_0^-))\, \delta_{x_0}$

4. Se $f \in C^1$ tranne in un punto x_0 in cui è continua ma con derivata infinita e $f' \in L^1_{loc}$ allora $(T_f)' = T_{f'}$

7.4

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nel caso particolare di $T = T_f$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\tau_a T_f = T_{\tau_a f}$

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\overset{x+a=y}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi(y-a)\,dy = \langle T_f, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

$\forall\, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$ TRASLAZIONE

Mostriamo che $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

- $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\tau_{-a}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ perciò $\tau_a T$ è ben definita
- $\tau_a T$ è lineare perché $\varphi \longmapsto \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$ è composizione di 2 operazioni lineari
- se $\varphi_k \to 0$ per $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ anche $\tau_{-a}\varphi_k \to 0$ e $\langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle \to 0$, quindi $\langle \tau_a T, \varphi \rangle \to 0$

quindi $\tau_a T$ è una distribuzione.

Es: $[\tau_a \delta_{x_0} = \delta_{x_0 - a}]$ infatti $\langle \tau_a \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \tau_{-a} \varphi \rangle$
$= \tau_{-a} \varphi(x_0) = \varphi(x_0 - a) = \langle \delta_{x_0 - a}, \varphi \rangle$

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $D_a T_f = T_{D_a f}$

$$\langle D_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_{D_a f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} D_a f(x) \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(ax) \varphi(x)\, dx$$

$$\overset{ax = y}{=} \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi\left(\frac{y}{a}\right) dy = \langle T_f, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle$$

$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \langle D_a T, \varphi \rangle = \langle T, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle$ DILATAZIONE

Es: $[D_a \delta_{x_0} = \frac{1}{a} \delta_{\frac{x_0}{a}}]$ infatti $\langle D_a \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle =$
$= \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi(x_0) = \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x_0}{a}\right) = \langle \frac{1}{a} \delta_{\frac{x_0}{a}}, \varphi \rangle$

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\check{T}_f = T_{\check{f}}$

$$< \check{T}_f, \varphi > = < T_{\check{f}}, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} \check{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(-x)\varphi(x)\,dx =$$

$$\underset{x=-y}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(-y)\,dy = < T_f, \check{\varphi} >$$

$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\quad < \check{T}, \varphi > = < T, \check{\varphi} >$ RIFLESSIONE

<u>Es:</u> $[\check{\delta}_{x_0} = \delta_{-x_0}]$ infatti $< \check{\delta}_{x_0}, \varphi > = < \delta_{x_0}, \check{\varphi} > =$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(-x)\,d\delta_{x_0}(x) = \varphi(-x_0)\,\delta_{x_0}(\{x_0\})$$

$$= \varphi(-x_0) = < \delta_{-x_0}, \varphi >$$

Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

Nel caso in cui $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $g \cdot T_f = T_{g \cdot f}$

$$< g \cdot T_f , \varphi > = < T_{g \cdot f} , \varphi > = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \varphi(x) dx = < T_f , g \cdot \varphi >$$

ma questo richiede che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulti $g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ovvero deve essere $g \in C^\infty(\Omega)$

$\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\forall g \in C^\infty(\Omega)$ definiamo

$< gT , \varphi > = < T , g\varphi >$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ PRODOTTO x FUNZIONE

<u>Es</u>: $\left[g\delta_{x_0} = g(x_0)\delta_{x_0} \right]$ infatti $< g\delta_{x_0} , \varphi > = < \delta_{x_0} , g\varphi > =$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) \, d\delta_{x_0}(x) = g(x_0) \varphi(x_0) = g(x_0) < \delta_{x_0} , \varphi >$$

7.5

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad (\tau_a T)' = \tau_a (T')$

$a > 0 \quad (D_a T)' = a D_a (T')$

$(\check{T})' = -(\check{T'})$

$g \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad (gT)' = (g')T + g(T')$

D: $\quad \langle (\tau_a T)', \varphi \rangle = - \langle \tau_a T, \varphi' \rangle = - \langle T, \tau_{-a}(\varphi') \rangle =$

$$\tau_{-a}(\varphi'(x)) = \varphi'(x-a) = (\varphi(x-a))' = (\tau_{-a}\varphi(x))'$$

$$= - \langle T, (\tau_{-a}\varphi)' \rangle = \langle T', \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle \tau_a(T'), \varphi \rangle$$

$\langle (D_a T)', \varphi \rangle = - \langle D_a T, \varphi' \rangle = - \langle T, \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}} \varphi' \rangle =$

$$(D_{\frac{1}{a}} \varphi(x))' = (\varphi(\tfrac{x}{a}))' = \frac{1}{a}\varphi'(\tfrac{x}{a}) = \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}}(\varphi')$$

$$= - \langle T, (D_{\frac{1}{a}}\varphi)' \rangle = \langle T', D_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle = \langle a D_a(T'), \varphi \rangle$$

$$\langle (\check{T})', \varphi \rangle = -\langle \check{T}, \varphi' \rangle = -\langle T, (\check{\varphi'}) \rangle =$$

$$(\check{\varphi})' = (\varphi(-x))' = -\varphi'(-x) = -(\check{\varphi'})$$

$$= -\langle T, -(\check{\varphi})' \rangle = \langle T', -\check{\varphi} \rangle = \langle -(\check{T'}), \varphi \rangle$$

$$\langle (gT)', \varphi \rangle = -\langle gT, \varphi' \rangle = -\langle T, g\varphi' \rangle =$$

$$(g\varphi)' = g'\varphi + g\varphi' \longrightarrow g\varphi' = (g\varphi)' - g'\varphi$$

$$= -\langle T, (g\varphi)' - g'\varphi \rangle = \langle T, g'\varphi \rangle - \langle T, (g\varphi)' \rangle =$$

$$= \langle g'T, \varphi \rangle + \langle T', g\varphi \rangle = \langle (g'T + gT'), \varphi \rangle$$

7.6

Siano $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si vuole definire $T * S$, in modo che nel caso paricolare in cui $T = T_f$ e $S = T_g$ si abbia che $T * S = T_{f*g}$, con $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, \varphi(x)\, dx \right)}_{\psi(y)} dy =$$

$$= \langle T_g, \psi \rangle =$$

$$= \langle T_g(y), \langle T_f, \tau_y \varphi \rangle \rangle$$

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(z) \underbrace{\varphi(y+z)}^{\tau_y \varphi(z)}\, dz$$

Quindi la "candidata" def. per la convoluzione di distribuzioni è:

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle S(y), \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle$$

Tuttavia se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si può dimostrare che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è detto che ψ sia a supporto compatto

Non posso sperare di definire la convoluzione di due distribuzioni qualsiasi.

Ho bisogno di fare un'ipotesi in più su S o su T

o chiedo a T qualcosa in più in modo che $\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle$ sia in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (e quindi $\langle S, \psi \rangle$ sia ben def $\forall S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

o chiedo a S qualcosa in più in modo che $\langle S, \psi \rangle$ sia ben def anche se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non a supp. compatto

Ci sono tante possibili risposte a questo problema, cioè diversi insiemi di ipotesi su T e S che renda_ no sensata $T * S$.

Una possibilità sta nel concetto di <u>distribuzione a supporto compatto.</u>

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si dice che T é una distribuzione a supporto compatto (si scrive $T \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$) se $\exists\, K \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato tale che

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ se } \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K \text{ allora } \langle T, \varphi \rangle = 0$$

Con questa nuova nozione é possibile, con le opportune ipotesi, definire la convoluzione di due distrib.:

date $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ se una delle due é $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ allora é ben def.

$$T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \langle T * S, \varphi \rangle = \langle S, \langle T, \tau_y \varphi \rangle \rangle$$

e inoltre $T * S = S * T$.

Infatti: Se $T \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ allora $\psi(y) = \langle T, \tau_y \varphi \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Se $S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ allora $\langle S, \psi \rangle$ ha senso $\forall \varphi \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Esempi di distrib. a supp. compatto sono la δ_0 oppure distribuzioni indotte da funzioni (L^1_{loc}) a supp. compatto

Siano $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e sia S (o T) a supp. compatto.
Allora $(T * S)' = T' * S = T * S'$

D: $\langle (T*S)', \varphi \rangle = -\langle T*S, \varphi' \rangle = -\langle S, \langle T, \tau_y(\varphi') \rangle\rangle =$

$\tau_y(\varphi') = (\tau_y \varphi)'$ infatti $\frac{d}{dx}(\varphi(x+y)) = \varphi'(x+y)$

$= \langle S, \langle T', \tau_y \varphi \rangle\rangle = \langle T' * S, \varphi \rangle$

Poiché $T * S = S * T$ si può concludere che

$\Longrightarrow \quad (T*S)' = T' * S = T * S'$

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Allora $T * \delta_0 = T$ (la conv. è ben def. essendo δ_0 a supp. compatto) inoltre $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ vale
$$T * \delta_{x_0} = \tau_{-x_0} T$$

D: $\langle T * \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}(y), \langle T, \tau_y \varphi \rangle\rangle = \langle T, \tau_{x_0} \varphi \rangle = \langle \tau_{-x_0} T, \varphi \rangle$

$\Longrightarrow \quad T * \delta_{x_0} = \tau_{-x_0} T \quad$ (in part.: $T * \delta_0 = T$)

Innanzitutto diamo la def. di soluzione fondamentale:

Si dice che $\Gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è una soluzione fondamentale dell'operatore diff. lin. L se $L\Gamma = \delta_0$.

Nel caso dell'operatore di Laplace: $L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

la sol. fondamentale è $\Gamma(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Si noti che Γ è $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ma $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$ non è $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Riscriviamo quindi $\Delta\Gamma = \delta_0$ usando le prop. delle distrib

$$\langle \Delta\Gamma, \varphi \rangle = \langle \Gamma, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma \, \Delta\varphi \, dx\,dy\,dz = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0,0,0)$$

ovvero $$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{c\,\Delta\varphi}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx\,dy\,dz = \varphi(0,0,0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

Conoscere la soluzione fondamentale di un op. diff. lin. è utile perché permette di ricavare rapidamente la soluzione u del problema $Lu = T$ dato un generico termine noto T.

Proviamolo: supponiamo di conoscere una sol. fondam. Γ dell'operatore Δ e di risolvere l'equazione

$$\Delta u = T \qquad T \in \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^3) \qquad (\text{ovvero cerco } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))$$

La sol. u é $u = \Gamma * T$ infatti, usando le prop delle distr.:

$$\Delta u = \Delta(\Gamma * T) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\Gamma * T) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Gamma\right) * T \right\} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Gamma \right) * T = (\Delta \Gamma) * T = \delta_0 * T = T$$

che conferma che $u = \Gamma * T$.

7.7-8-9

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Cerchiamo una def. consistente per $\hat{T}$.

Se $T = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ voglio che $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$.

$$< \hat{T}_f , \varphi > = < T_{\hat{f}}, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi =$$

$$= < T_f , \hat{\varphi} >$$

$\forall f, \varphi \in L^1(\mathbb{R})$ $\int \hat{f} \varphi = \int f \hat{\varphi}$

Perciò la "candidata" def. di trasf. di Fourier di una distrib. è: $< \hat{T}, \varphi > = < T, \hat{\varphi} >$.

Tuttavia, se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ non è garantito che $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Anzi, si può dimostrare che se una generica $f \in L^1(\mathbb{R})$ è a supp. compatto, la sua trasformata $\hat{f}$ sarà anch'essa a supp. compatto nel solo caso in cui $f \equiv 0$.

Quindi, in generale $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e il bracket non è ben definito.

Sappiamo però che se $\varphi \in S(\mathbb{R})$ anche $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$.

C'è bisogno di introdurre una nuova classe di distrib. intermedia tra $D'_0(\mathbb{R})$ e $D'(\mathbb{R})$

Da ciò proviene la classe delle <u>distribuzioni temperate $S'(\mathbb{R})$</u> "duale" dello spazio di Schwartz. Tra virgolette perchè $S(\mathbb{R})$ è uno spazio normato ma non completo, in cui bisogna definire una nozione di convergenza "ad hoc":

Sia $\{\phi_n\} \subseteq S(\mathbb{R})$. Diciamo che $\phi_n \to 0$ in $S(\mathbb{R})$ se

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^h)\left|\frac{\partial^k \phi_n(x)}{\partial x^k}\right| \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty \quad \forall h = 0,1,2\dots \ \forall K = 0,1,2\dots$$

Diremo che $\phi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} \phi$ se $(\phi_n - \phi) \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0$

cioè $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$

Si noti che se $\{\varphi_n\} \subseteq D(\mathbb{R})$ e $\varphi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$ allora anche $\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0$

Le funzioni $\phi \in S(\mathbb{R})$ sono dette "a decrescenza rapida" (in quanto decrescono con tutte le derivate più velocemente di quanto cresca qualsiasi potenza di x)

Si dirà allora che $T \in S'(\mathbb{R})$, ossia che T è una distrib. temperata su $\mathbb{R}$, se

$T : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), T è lineare, $\forall \{\phi_n\} \subseteq S(\mathbb{R})$ e $\phi \in S(\mathbb{R})$

se $\phi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} \phi$ allora $\langle T, \phi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \phi \rangle$.

Se $T \in D'_0(\mathbb{R})$ allora $T \in S'(\mathbb{R})$

Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, +\infty]$ allora $T_f \in S'(\mathbb{R})$

Se f è una funz. lentamente crescente all'infinito, cioè $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $|f(x)| \leq c(1 + |x|^k)$ per qualche $c, k > 0$, allora $T_f \in S'(\mathbb{R})$

non cresce più di una certa potenza

D: Sia $T = T_f$ con $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$. Sia $\phi \in S(\mathbb{R})$. Detto q esp. coniugato di p, per la disug. di Holder si ha:

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)\,\phi(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p} \, \|\phi\|_{L^q}$$

Valutiamo $\|\phi\|_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+|x|^2}{1+|x|^2} |\phi(x)|^q dx \leq$

$$\leq \left[\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^{2/q}) |\phi(x)|\right]^q \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x|^2} < +\infty$$

Quindi $|\langle T_f, \phi\rangle| \leq \|f\|_{L^p} \|\phi\|_{L^q} < +\infty$ e il funzionale è ben def. su $S(\mathbb{R})$.

Posta $\{\phi_n\}$ una successione convergente a 0 in $S(\mathbb{R})$, calcolando $\langle T_f, \phi_n\rangle$ ricaverei lo stesso risultato di prima ovvero

$$|\langle T_f, \phi_n\rangle \leq \|f\|_{L^p} \cdot K \cdot \left[\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^{2/q}) |\phi_n(x)|\right]^q$$

che tende a 0 e quindi T é un funzionale (lineare) continuo su S e quindi é una distr. temperata

D Sia $T = T_f$ con $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funz. lentamente crescente. tale che $|f(x)| \leq C(1+|x|^k)$ per qualche $c,k>0$ Sia $\phi \in S(\mathbb{R})$.

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||\phi(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} C(1+|x|^k)|\phi(x)| dx$$

Introduciamo la "seminorma" $p_n^{(N)}(\phi)$ di $\phi \in S(\mathbb{R})$:

$$p_n^N(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^n) \sum_{i=0}^{N} \left| \frac{\partial^i \varphi(x)}{\partial x^i} \right|$$

per cui se $\exists\, n, N \geq 0$ e $c>0$ t.c.

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq c \cdot p_n^N(\phi) \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}) \text{ allora } T \in S'(\mathbb{R})$$

Possiamo quindi scrivere

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} c(1+|x|^k)\,|\phi(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} c\,(1+|x|^k)\,\frac{p^0_{k+2}(\phi)}{(1+|x|^{k+2})}\,dx$$

$$= c\, p^0_{k+2}(\phi) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1+|x|^k}{1+|x|^{k+2}}\,dx}_{<+\infty} \leq c' \cdot p^0_{k+2}(\phi)$$

Dunque $T \in S'(\mathbb{R})$

Sia $T \in S'(\mathbb{R})$. Si definisce $\hat{T}$ ponendo

$$\langle \hat{T}, \phi\rangle = \langle T, \hat{\phi}\rangle \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}). \text{ Si ha che } \hat{T} \in S'(\mathbb{R})$$

7.8

Si dice che $T \in S'(\mathbb{R})$, ossia che T é una distrib. temperata su $\mathbb{R}$, se

$T: S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, T é lineare, $\forall \{\phi_n\} \subseteq S(\mathbb{R})$ e $\phi \in S(\mathbb{R})$

se $\phi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} \phi$ allora $\langle T, \phi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \phi \rangle$.

$S(\mathbb{R})$ é lo spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida.

Sia $T \in S'(\mathbb{R})$. Si definisce $\hat{T}$ ponendo

$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R})$. Si ha che $\hat{T} \in S'(\mathbb{R})$

Se $T \in S'(\mathbb{R})$, allora:

- $\mathcal{F}(\tau_a T)(\xi) = e^{2\pi i a \xi} \mathcal{F}(T)(\xi)$
- $\mathcal{F}(D_a T)(\xi) = \frac{1}{a} \mathcal{F}(T)(\frac{\xi}{a}) \quad \forall a > 0$

- $\mathcal{F}\left(e^{2\pi i a x} T\right)(\xi) = \tau_{-a}\mathcal{F}(T)(\xi)$
- $\mathcal{F}(T^{(n)})(\xi) = (2\pi i \xi)^n \mathcal{F}(T)(\xi)$
- $(\mathcal{F}(T))^{(n)}(\xi) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^n T\right)(\xi)$
- $\mathcal{F}(T * f) = \hat{T} \cdot \hat{f}$ e $\mathcal{F}(T f) = \hat{T} * \hat{f}$ con $f \in S(\mathbb{R})$

D: $\mathcal{F}(T')$: $\langle \widehat{(T')}, \varphi \rangle = \langle T', \hat{\varphi} \rangle = -\langle T, (\hat{\varphi})' \rangle =$

$= -\langle T, \mathcal{F}(-2\pi i x \varphi(x)) \rangle = -\langle \hat{T}, -2\pi i x \varphi \rangle$

$= \langle 2\pi i \xi \hat{T}, \varphi \rangle = 2\pi i \xi \mathcal{F}(T)$

Iterando ottengo $\mathcal{F}(T^{(n)}) = (2\pi i \xi)^n \mathcal{F}(T)$

$(\hat{T})'$: $\langle (\hat{T})', \varphi \rangle = -\langle \hat{T}, \varphi' \rangle = -\langle T, \widehat{(\varphi')} \rangle =$

$= -\langle T, 2\pi i \xi \hat{\varphi} \rangle = \langle -2\pi i x T, \hat{\varphi} \rangle =$

$= \langle \mathcal{F}(-2\pi i x T), \varphi \rangle.$

Iterando ottengo $(\hat{T})^{(n)} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^n T)$

7.9

Si dice che $T \in S'(\mathbb{R})$, ossia che T è una distrib. temperata su $\mathbb{R}$, se

$T: S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, T è lineare, $\forall \{\phi_n\} \subseteq S(\mathbb{R})$ e $\phi \in S(\mathbb{R})$

se $\phi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} \phi$ allora $\langle T, \phi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \phi \rangle$.

$S(\mathbb{R})$ è lo spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida.

Sia $T \in S'(\mathbb{R})$. Si definisce $\hat{T}$ ponendo

$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R})$. Si ha che $\hat{T} \in S'(\mathbb{R})$

D: $\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \langle T_1, \varphi \rangle$

$\Longrightarrow \boxed{\hat{\delta}_0 = 1}$

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \langle T_1, \varphi \rangle \Longrightarrow \boxed{\hat{\delta}_0 = 1}$$

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i a x}\,dx =$$

$$= \langle T_{e^{-2\pi i a x}}, \varphi \rangle \Longrightarrow \boxed{\hat{\delta}_a = e^{-2\pi i a x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\hat{\delta}}_a = \check{\delta}_a = \delta_{-a} \\ \mathcal{F}(e^{-2\pi i a \xi}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}(e^{-2\pi i a x}) = \delta_{-a}}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(\cos \omega x) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(e^{i\omega x}) + \mathcal{F}(\overbrace{e^{-i\omega x}}^{-i2\pi a x \,\to\, a = \frac{\omega}{2\pi}})\right] = \frac{1}{2}\left[\delta_{\frac{\omega}{2\pi}} + \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}}\right]}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(\operatorname{sen} \omega x) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\delta_{\frac{\omega}{2\pi}} - \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}}\right]}$$

$$\mathcal{F}((-2\pi i x)^n) = (\hat{1})^{(n)} = \delta_0^{(n)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(x^n) = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\delta_0^{(n)}} \quad \text{e quindi } \mathcal{F}(x) = -\frac{\delta_0'}{2\pi i}$$

7.10

Se $\{T_k\} \subseteq D'(\Omega)$ $\quad T \in D'(\Omega)$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}$ aperto; diciamo che

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{k \to +\infty} T_k = T \quad \text{se} \quad \lim_{k \to +\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \\ &\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \quad \text{se} \quad \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}\right\} \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Una serie di distribuzioni è ad esempio il treno di impulsi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}$$

Esso converge, in particolare, ad una distribuzione. Infatti:

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=-k}^{k} \delta_{na} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=-k}^{k} \langle \delta_{na}, \varphi \rangle = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=-k}^{k} \varphi(ka) < +\infty$$

essendo $\varphi \in D(\mathbb{R})$, quindi a supp. compatto, e quindi nulla per valori di ka al di fuori del supporto. La serie è quindi troncata da un certo valore di k in poi per cui è necessariamente convergente

Di solito il treno di impulsi si indica con

$$\Delta_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na}$$

Per lo stesso motivo, la successione $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ è convergente, e in particolare converge a 0. Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \delta_n, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = 0$$ essendo $\varphi \in D(\mathbb{R})$ e quindi $\varphi(\pm\infty) = 0$

Supponiamo che $\{T_n\} \subseteq D(\mathbb{R})$, $T \in D(\mathbb{R})$ t.c.

1) $T_n \to T$ allora $T_n' \to T'$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} T_n' = T'$

D: 1) $T_n' \to T$ se $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$ $\langle T_n', \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T', \varphi \rangle$

$$\langle T_n', \varphi \rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle \longrightarrow -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} T_n' = T'$ cioè $< \sum_{n=1}^{\infty} T_n', \varphi > = < T', \varphi >$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} T_n', \varphi > = \sum_{n=1}^{\infty} < T_n', \varphi > = - \sum_{n=1}^{\infty} < T_n, \varphi' > = - < \sum_{n=1}^{\infty} T_n, \varphi' > =$$

$$= - < T, \varphi' > = < T', \varphi >$$

Sia $\{T_n\} \subseteq S'(\mathbb{R})$, $T \in S'(\mathbb{R})$. Allora

1) $T_n \longrightarrow T \implies \hat{T}_n \longrightarrow \hat{T}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} T_n = T \implies \mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}$

D: 1) $\hat{T}_n \longrightarrow \hat{T}$ significa $< \hat{T}_n, \varphi > \longrightarrow < \hat{T}, \varphi > \; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

$$< \hat{T}_n, \underset{\substack{\cup\\ S}}{\varphi} > = < T_n, \overset{\in S}{\hat{\varphi}} > \longrightarrow < T, \hat{\varphi} > = < \hat{T}, \varphi >$$

analogamente 2)

7.11

Consideriamo una serie trigonometrica del tipo

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k\omega x}$ con $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ successione lentamente crescente cioè:

$$\exists\, c, N > 0 \quad \text{t.c. } |a_k| \geq c(1+|x|^N) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Allora la serie definisce una distribuzione temperata.

D: Sia $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \langle e^{2\pi i k\omega x}, \varphi\rangle\right| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{2\pi i k\omega x} dx\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\,|\hat{\varphi}(-k\omega)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(1+|x|^N)\,|\hat{\varphi}(-k\omega)| \leq$$

$$\varphi \in S(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}) \longrightarrow |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{c}{1+|\xi|^{N+2}}$$

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq p^{(0)}_{N+2}(\hat{\varphi}) / (1+|\xi|^{N+2})$$

$$\leq c\, p^{(0)}_{N+2}(\hat{\varphi}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|^N)}{(1+|k\omega|^{N+2})} \leq c\, p^{(0)}_{N+2}(\hat{\varphi}) \leq c\, p^{(\dots)}_{\dots}(\varphi)$$

es: proviamo a calcolare la trasf. di Fourier

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)\right)$$

La serie di funzioni diverge in tutto $\mathbb{R}$, come serie di distribuzioni converge in $S'(\mathbb{R})$ (è una serie trig. con coeff. lentamente crescenti) ed è quindi $\mathcal{F}$-trasformabile

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\cos kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{\frac{k}{2\pi}} + \delta_{-\frac{k}{2\pi}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_0\right)$$

Proviamo ora che il treno di impulsi Δ_a è una distribuzione temperata

$$|\langle \Delta_a, \varphi \rangle| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \delta_{ka}, \varphi \rangle| = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka)\Big| \leq p_2^{(0)}(\varphi) \overbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+|ka|^2}}^{<+\infty}$$

$$|\varphi(x)| \leq \frac{p_N^{(0)}(\varphi)}{1+|x|^N} \qquad = p_2^{(0)}(\varphi) \cdot c$$

Quindi per il teorema delle seminorme $\Delta_a \in S'(\mathbb{R})$